ГЛАВА 15. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

15.1 Общее описание и применяемые методы

Программный комплекс ЛИРА 10 основан на методе конечных элементов (МКЭ) и предназначен для расчета строительных конструкций. Графическая система ПК ЛИРА 10 позволяет эффективно генерировать конечно-элементную модель и визуализировать результаты расчета. Конструирующие системы реализуют проверку и подбор железобетонных и стальных сечений.

Расчетный процессор ПК ЛИРА 10 предназначен для решения линейных и нелинейных статических и динамических задач механики сплошной среды. Теория изложена в [1 – 5, 7, 11, 14, 29, 39, 41, 47, 48, 54, 56, 60, 62, 65, 70, 74, 78, 88]. Применяется метод конечных элементов. Основные теоремы о сходимости и оценках погрешности МКЭ доказаны в [15, 17 – 20, 28, 44, 46, 49, 50, 58, 59, 79 – 87], исследование конечных элементов (КЭ), применяемых в ПК ЛИРА 10, проведено в [33, 59, 71, 77].

Рассчитываемые конструкции:

- плоские и пространственные фермы и рамы;
- пластины;
- массивные тела;
- комбинированные системы.

Нагрузки:

- распределённые по области или грани, заданные в глобальной системе координат, в которой определены координаты узлов, или в местной, связанной с элементом;
- сосредоточенные (узловые), заданные в глобальной системе координат или в локальной, связанной с узлом;
- температурные, задаются для элемента, только в статической задаче;
- для динамических задач – импульс, периодическое воздействие, ветер, сейсмика.

Граничные условия, в том числе и неоднородные, задаются для перемещений и поворотов узлов в глобальной или локальной системе координат.

Абсолютно жесткие тела (АЖТ) задаются непересекающимися наборами узлов.

15.2 Линейная статическая задача

Решение U линейной статической задачи при всех возможных перемещениях V удовлетворяет равенствам:

$$a_0(U,V) = q(V), \tag{15.1}$$

где $a_0(U,V)$, $q(V)$ – функционалы возможных работ внутренних и внешних сил, линейные по V, функционал $a_0(U,V)$ линеен и по U, симметричен и положительно определен.

МКЭ сводит задачу (15.1) к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решив которую методом Гаусса, определяем перемещения узлов. Для ускорения решения СЛАУ производится перенумерация неизвестных, уменьшающая заполняемость матрицы [53].

Напряжения (усилия) вычисляются далее для каждого КЭ по известным формулам теории упругости.

15.3 Линейная динамическая задача

Решение U линейной динамической задачи при всех возможных перемещениях V удовлетворяет равенствам

$$b(U'',V)+c(U',V)+a_0(U,V)=q(V), \tag{15.2}$$

где $b(U,V)$, $c(U,V)$ – симметричные положительно определенные функционалы возможных работ инерционных сил и сил сопротивления движению. Перемещения и внешние силы зависят от времени t, штрихами обозначается дифференцирование по t. Добавляются начальные или периодические условия $U(0)=U^0$, $U'(0)=U^1$, $U(0)=U(T_0)$, $U'(0)=U'(T_0)$, T_0 – период.

Задачи (15.2) решаются в ПК ЛИРА 10 методом Фурье разложения по формам собственных колебаний [36, 38, 73], рекомендованным строительными нормами. Формы $V_k(x)$ и частоты ω_k собственных колебаний являются решениями задачи на собственные значения

$$a_0(V,W)=\omega^2 b(V,W) \tag{15.3}$$

и определяются методом итераций подпространств [53] с использованием модифицированного метода Якоби. Задача (15.2) сводится к независимым обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами с начальными или периодическими условиями, которые легко решаются аналитически. Точность метода зависит от количества вычисленных форм. Влияние не вычисленных форм в ПК ЛИРА 10 не учитывается. Для импульса, периодического воздействия, ветра, сейсмики дальнейшие вычисления производятся согласно рекомендаций строительных норм.

Задачи (15.2) с начальными условиями решаются в ПК ЛИРА 10 также в системе ДИНАМИКА+ методом конечных разностей по безусловно устойчивой схеме [9, 10, 25]

$$b(\gamma_n U,V)+c(\beta_n U,V)+a_0(\alpha_n U,V)=q_n(V), \tag{15.4}$$

θ – шаг по времени, $t_n=n\theta$, $U_n=U(t_n)$,

$\delta_n U=(U_{n+1}-U_n)/\theta$, $\beta_n U=(U_{n+1}-U_{n-1})/2\theta=(\delta_n(U)+\delta_{n-1}(U))/2$,

$\gamma_n U=(U_{n+1}-2U_n+U_{n-1})/\theta^2$, $\alpha_n U=(U_{n+1}+U_{n-1})/2$.

Нагрузка – кусочно-линейная функция от времени.

Погрешность схемы (15.4) пропорциональна θ^2.

15.4 Задачи упругой устойчивости недеформированной схемы

Задачи упругой устойчивости недеформированной схемы [1, 2, 27] аналогичны задаче на собственные значения (15.3). Критические значения λ_k и соответствующие им формы потери устойчивости $V_k(x)$ являются решениями задачи

$$a_0(V,W)+\lambda a'_\sigma(U,V,W)=0, \tag{15.5}$$

$a'_\sigma(U,V,W)$ – функционал устойчивости [27, 52], зависящий от полученных в результате решения линейной статической задачи напряжений (усилий). Наименьшее из положительных

λ_k называют коэффициентом запаса устойчивости или критическим значением для заданной нагрузки. Задачи (15.5) решаются в ПК ЛИРА 10 также методом итераций подпространств. Реализованные методы позволяют исследовать не только устойчивость при сжатии, но и изгибно- крутильные формы потери устойчивости.

15.5 Нелинейные статические и динамические задачи

ПК ЛИРА 10 позволяет решать нелинейные статические и динамические задачи: геометрически нелинейные, нелинейно упругие, упруго пластические, с односторонними ограничениями, в том числе с трением, механики сыпучей среды (грунтов). Существование и единственность решения нелинейных задач исследованы в [8, 16, 31, 32, 35, 37, 55, 61, 67].

Решение U нелинейной статической задачи при всех возможных перемещениях V удовлетворяет равенствам

$$a(U,V) = q(V), \tag{15.6}$$

где функционал $a(U,V)$ возможной работы внутренних сил линеен по V, но не линеен по U.

Нелинейные статические задачи с непрерывно дифференцируемыми нелинейностями (геометрическая нелинейность, нелинейная упругость) решаются шаговым методом [37,51]:

$$a'(U_n, U_{n+1} - U_n, V) = (\theta_{n+1} - \theta_n) q(V), \tag{15.7}$$

где $a'(U,W,V)$ – производная $a(U,V)$,

$U_0 = 0, n = 1, ..., N, 0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_N = 1.$

Используется автоматический выбор шагов. Критерием является изменение геометрии и жесткости. Если производная $a'(U,W,V)$ положительно определена, конструкция устойчива и погрешность метода (15.7) пропорциональна максимальному шагу. Шаговый метод для геометрически нелинейных задач позволяет исследовать устойчивость деформированной схемы [52].

В ПК ЛИРА 10 реализован расчет геометрически нелинейных задач после потери устойчивости: для нагрузки, при которой произошла потеря устойчивости, определяется устойчивое равновесное состояние, после чего расчет продолжается шаговым методом.

В геометрически нелинейных задачах и задачах устойчивости учитывается наличие АЖТ в соответствии с [52].

15.6 Задачи с односторонними ограничениями, с трением и механики сыпучей среды

Задачи с односторонними ограничениями, а также упруго пластические, с трением и механики сыпучей среды, сформулированы в виде

$$a_0(U,V) + d(U,V) = q(V), \tag{15.8}$$

где $d(U,V) = a(U,V) - a_0(U,V)$,

и решаются итерационным методом [12]:

$$a_0(U_{n+1},V) + d(U_n,V) = q(V). \tag{15.9}$$

Метод Фурье не применим к нелинейным динамическим задачам, поэтому такие задачи решаются в ПК ЛИРА 10 с использованием аналогичных (15.4) разностных схем [12, 25].

В ПК ЛИРА 10 реализована система МОНТАЖ, позволяющая на каждой стадии монтировать и (или) демонтировать группы линейных и нелинейных КЭ в соответствии с последовательностью возведения конструкции. После каждой стадии возможна проверка устойчивости. Динамические нагрузки прикладываются только после последней стадии.

В ПК ЛИРА 10 имеется система **Вариация моделей**, вычисляющая расчетные сочетания усилий для топологически эквивалентных схем с различными жесткостными характеристиками, система МОСТ– построение линий и поверхностей влияния для подвижных нагрузок.

15.7 Конечные элементы линейной статической задачи

В соответствии с [60], описание конечного элемента должно содержать:

- задачу, для решения которой он предназначен;
- область Ω,занимаемую конечным элементом, и его узлы X_l;
- множество узловых неизвестных;
- множество H_μ линейных комбинаций базисных функций μ_k или их явный вид.

Базисные функции зависят только от геометрических характеристик элемента и порядка производных m в функционале возможных работ внутренних сил. При наличии изгиба или стесненного кручения порядок производных равен двум, в остальных случаях – единице. Построения производятся для стандартных КЭ Ω_0. Базисные функции и порядок погрешности τ приведены[33,59,71].

Обозначим $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых на Ω функций; $P_r(\Omega)$ – множество многочленов степени не выше r на Ω; $Q_r(\Omega)$ – множество произведений многочленов степени не выше r по каждой переменной, $P_r(\Omega) \subset Q_r(\Omega)$.

Стержневые КЭ

Область КЭ$\left(\Omega_0\right)$– отрезок [0, l] с узлами $X_1 = 0,\ X_2 = l$; узловые неизвестные $-u(X_i)$ при $m=1$, $u(X_i),\ u'(X_i)$ при $m = 2$. Базисные функции μ_k удовлетворяют однородным уравнениям равновесия порядка $2m$, поэтому дают точное решение задачи. Базисные функции при постоянном сечении имеют вид$\left(s = x_1 / l\right)$:

при $m=1$

$$\mu_1 = 1 - s\ ,\ \mu_2 = s, \tag{15.10}$$

при $m = 2$

$$\mu_1 = 1 - 3s^2 + 2s^3\ ,\ \mu_2 = l(s - 2s^2 + s^3)\ ,\ \mu_3 = 3s^2 - 2s^3\ ,\ \mu_4 = l(-s^2 + s^3). \tag{15.11}$$

Двумерные КЭ

Ω_0 – треугольник с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, единичный квадрат, четырехугольник с вершинами$(1,0)$, $(0,1)$, $(a,0)$, $(0,b)$, $a<0$, $b<0$.Линейное преобразование переводит соответствующий Ω_0 в произвольный треугольник, прямоугольник, выпуклый четырехугольник. Четырехугольник разбивается диагоналями на четыре треугольника Ω_q.

Трехмерные КЭ

Ω_0 – единичный тетраэдр, единичный куб и единичная прямая треугольная призма. Узлы – в вершинах, если указано, и в серединах сторон или ребер.

Двух-и трехмерные элементы при $m=1$

Узловые неизвестные для всех элементов – $u(X_i)$.

1. Треугольник, $\tau=1$:

$H_\mu = \mathrm{P}_1(\Omega)$. Базисные функции на Ω_0 имеют вид

$$\mu_1 = 1 - s_1 - s_2,\ \mu_2 = s_1,\ \mu_3 = s_2. \tag{15.12}$$

2. Прямоугольник, $\tau=1$:

$H_\mu = \mathrm{Q}_1(\Omega)$. Базисные функции на Ω_0 имеют вид

$$\mu_1 = r_1 r_2,\ \mu_2 = s_1 r_2,\ \mu_3 = r_1 s_2,\ \mu_4 = s_1 s_2,\ r_i = 1 - s_i. \tag{15.13}$$

3. Четырехугольник:

Базисные функции удовлетворяют условиям: $\mu_k \in P_2(\Omega_q)$, $\mu_k \in C^1(\Omega)$, $H_\mu \supset P_1(\Omega)$, $\tau=1$

.

4. Треугольник с узлами в серединах сторон, $\tau=2$:

$H_\mu = \mathrm{P}_2(\Omega)$. Базисные функции на Ω_0 имеют вид

$$\begin{gathered}\mu_1 = 1 - 3s_1 - 3s_2 + 2s_1^2 + 4s_1 s_2 + 2s_2^2,\ \mu_2 = -s_1 + 2s_1^2,\ \mu_3 = -s_2 + 2s_2^2,\\ \mu_4 = 4s_1 s_2,\ \mu_5 = 4s_2 - 4s_1 s_2 - 4s_2^2,\ \mu_6 = 4s_1 - 4s_1 s_2 - 4s_1^2.\end{gathered} \tag{15.14}$$

5. Четырехугольник с узлами в серединах сторон, $\tau=2$:

Базисные функции удовлетворяют условиям: $\mu_k \in P_2(\Omega_q)$, $\mu_k \in C^1(\Omega)$, $H_\mu = P_2(\Omega)$.

6. Тетраэдр, $\tau=1$:

$H_\mu = \mathrm{P}_1(\Omega)$. Базисные функции на Ω_0 имеют вид

$$\mu_1 = 1 - s_1 - s_2 - s_3,\ \mu_2 = s_1,\ \mu_3 = s_2,\ \mu_4 = s_3. \tag{15.15}$$

7. Параллелепипед , $\tau=1$:

$H_\mu = \mathrm{P}_1(\Omega)$. Базисные функции на Ω_0 имеют вид

$$\begin{gathered}\mu_1 = r_1 r_2 r_3,\ \mu_2 = s_1 r_2 r_3,\ \mu_3 = r_1 s_2 r_3,\ \mu_4 = s_1 s_2 r_3,\\ \mu_5 = r_1 r_2 s_3,\ \mu_6 = s_1 r_2 s_3,\ \mu_7 = r_1 s_2 s_3,\ \mu_8 = s_1 s_2 s_3,\ r_i = 1 - s_i.\end{gathered} \tag{15.16}$$

8. Треугольная призма, $\tau=1$:

$H_\mu \supset \mathrm{P}_1(\Omega)$. Базисные функции на Ω_0 имеют вид

$$\begin{gathered}\mu_1 = (1 - s_1 - s_2) r_3,\ \mu_2 = s_1 r_3,\ \mu_3 = s_2 r_3,\\ \mu_4 = (1 - s_1 - s_2) s_3,\ \mu_5 = s_1 s_3,\ \mu_6 = s_2 s_3\end{gathered} \tag{15.17}$$

9. Тетраэдр с узлами в серединах ребер, $\tau=2$:

$H_\mu = \mathrm{P}_2(\Omega)$.

10. Параллелепипед с узлами в серединах ребер, $\tau = 2$:

$P_2(\Omega) \subset H_\mu \subset P_4(\Omega)$.

11. Треугольная призма с узлами в серединах ребер, $\tau = 2$:

$P_2(\Omega) \subset H_\mu \subset P_3(\Omega)$.

Для элементов 9, 10 и 11 с узлами на ребрах уравнения граней, не содержащих узел X_k, имеют вид $l_{ki}(s_1, s_2, s_3) = 0$, где $l_{ki}(s_1, s_2, s_3)$ – многочлены первой степени. Для вершины таких граней на единицу меньше, чем для середины ребра. Дополнительный многочлен для вершины соответствует уравнению плоскости, проходящей через середины сторон, содержащих эту вершину. Тогда базисные функции являются произведениями построенных многочленов и коэффициента, который вычисляется из условия $\mu_k(X_k) = 1$. Равенства $\mu_k(X_i) = 0, i \neq k$ выполнены по построению.

Базисные функции (15.15) – (15.17) преобразуют стандартный КЭ в произвольный.

Двумерные элементы изгиба при $m = 2$

Узловые неизвестные – $u(X_i)$, $\alpha_1(X_i) = \partial u / \partial x_2(X_i)$, $\alpha_2(X_i) = -\partial u / \partial x_1(X_i)$.

12. Прямоугольник, $\tau = 2$:

$H_\mu \supset P_3(\Omega)$. Базисные функции на прямоугольнике Ω_0 имеют вид

$$\begin{aligned} &\mu_i = \varphi_i(1-s_1, 1-s_s),\ \mu_{i+3} = \varphi_i(s_1, 1-s_s),\ \mu_{i+6} = \varphi_i(1-s_1, s_s),\ \mu_{i+9} = \varphi_i(s_1, s_s), \\ &\varphi_1 = s_1 s_2(-1 + 3s_1 + 3s_2 - 2s_1^2 - 2s_2^2),\ \varphi_2 = s_1 s_2^2(1-s_2),\ \varphi_3 = s_1^2 s_2(1-s_1). \end{aligned} \tag{15.18}$$

13. Треугольник, $\tau = 1$:

Базисные функции удовлетворяют условиям: $P_4(\Omega) \supset H_\mu \supset P_2(\Omega)$.

14. Четырехугольник, $\tau = 1$:

Базисные функции удовлетворяют условиям: $\mu_k \in P_3(\Omega_q)$, $\mu_k \in C^1(\Omega)$, $H_\mu \supset P_2(\Omega)$.

15. Треугольник с узлами в серединах сторон, $\tau = 1$:

Базисные функции удовлетворяют условиям: $P_4(\Omega) \subset H_\mu \subset P_5(\Omega)$.

16. Четырехугольник с узлами в серединах сторон, $\tau = 2$:

Базисные функции удовлетворяют условиям: $\mu_k \in P_5(\Omega_q)$, $\mu_k \in C^2(\Omega)$, $H_\mu \supset P_3(\Omega)$.

Вычисление базисных функций четырехугольников 3, 5и двумерных элементов изгиба 13 – 16 сводится к решению систем линейных уравнений, которое выполняется программой.

15.8 Функционалы возможных работ линейной задачи

Ниже представлены функционалы возможных работ внутренних и внешних сил, инерционных сил и сил сопротивления движению, а также функционал для задачи устойчивости.

Обозначим Ω –трехмерную область с границей Γ, $x \in \Omega$ – независимые переменные, $U(x)$ –перемещения, V, W – возможные перемещения, f – внешние силы, $\sigma_{ij}(U)$ – напряжения, $\varepsilon_{ij}(U)$, $e_{ij}(U)$ – линейные и геометрически нелинейные деформации, $E, G, K, \mu,$ – модули Юнга, сдвига, объемной деформации и коэффициент Пуассона, $0 <= \mu < 1/2$,

$G = E/(1+\mu)$, $K = E/(1-2\mu)$, ρ – плотность, T – температура, ζ – коэффициент температурной деформации. Используется суммирование по повторяющимся индексам, индексы i, j, k, l принимают значения 1, 2, 3.

Трехмерная задача

$$a_0(U,V) = \int_\Omega G(\varepsilon_{ij}(U) + \delta_{ij}\Lambda\varepsilon_{kk}(U))\varepsilon_{ij}(V)dx\,, \tag{15.19}$$

где

$$\varepsilon_{ij}(U) = (\partial U_i/\partial x_j + \partial U_j/\partial x_i)/2\,, \tag{15.20}$$

$$(q,V) = \int_\Omega f_i U_i dx\,, \tag{15.21}$$

$$b(U,V) = \int_\Omega \rho U_i V_i dx\,, \tag{15.22}$$

$$c(U,V) = \int_\Omega c_i U_i V_i dx\,. \tag{15.23}$$

Функционал для задачи устойчивости

$$a'_\sigma(U,V,W) = \int_\Omega \sigma_{ij}(U)\cdot d^2 e_{ij}(V,W)dx\,, \tag{15.24}$$

где

$$d^2 e_{ij}(V,W) = (\partial V_k/\partial x_i \cdot \partial W_k/\partial x_j + \partial W_k/\partial x_i \cdot \partial V_k/\partial x_j)/2\,. \tag{15.25}$$

Пластины

Ось x_3 ортогональна срединной плоскости пластины, занимающей двумерную область Ω_0 с границей Γ_0. Толщина пластины δ, $I = \delta^3/12$, оси x_1 и x_2 лежат в срединной плоскости, $E_0 = E/(1-\mu^2)$. Индексы r, q принимают значения 1, 2.

$$a_0(U,U) = a_N(U,U) + a_M(U,U) + a_Q(U,U)\,, \tag{15.26}$$

где

$$a_N(U,U) = \int_{\Omega_0} \delta(E_0(\partial u_1/\partial x_1 + \mu\partial u_2/\partial x_2)\partial u_1/\partial x_1 + E_0(\mu\partial u_1/\partial x_1 + \partial u_1/\partial x_1)\partial u_2/\partial x_2 + $$
$$+ G(\partial u_1/\partial x_2 + \partial u_2/\partial x_1)^2/2)dx_1 dx_2, \tag{15.27}$$

$$a_M(U,U) = \int_{\Omega_0} I(E_0(\partial\alpha_2/\partial x_1 + \mu\partial\alpha_1/\partial x_2)\partial\alpha_2/\partial x_1 + $$
$$+ E_0(-\mu\partial\alpha_2/\partial x_1 + \partial\alpha_1/\partial x_2)\partial\alpha_1/\partial x_2 + G(\partial\alpha_2/\partial x_2 - \partial\alpha_1/\partial x_1)^2/2)dx_1 dx_2\,, \tag{15.28}$$

$$a_Q(U,U) = k\int_{\Omega_0} \delta G((\partial u_3/\partial x_1 + \alpha_2)^2 + (\partial u_3/\partial x_2 - \alpha_1)^2)dx_1 dx_2/2\,, k = 5/6\,. \tag{15.29}$$

Функционал (15.29) учитывает влияние поперечного сдвига.

При отсутствии поперечного сдвига, т.е. при $a_Q(U,U) = 0$, получим

$$a_M(U,U) = \int_{\Omega_0} I(E_0(\partial^2 u_3/\partial x_1^2 + \mu\partial^2 u_3/\partial x_2^2)\partial^2 u_3/\partial x_1^2 + $$
$$+ E_0(\mu\partial^2 u_3/\partial x_1^2 + \partial^2 u_3/\partial x_2^2)\partial^2 u_3/\partial x_2^2 + 2G(\partial^2 u_3/\partial x_1\partial x_2)^2)dx_1 dx_2\,, \tag{15.30}$$

При отсутствии изгиба, т.е. при $a_M(U,U) = a_Q(U,U) = 0$, имеем $a_0(U,U) = a_N(U,U)$.

При учете упругого основания в $a_0(U,U)$ добавляется слагаемое

$$c_0(U,U) = \int_{\Omega_0} (C_1 u_3^2 + C_2(\partial u_3 / \partial x_1)^2 + C_2(\partial u_3 / \partial x_2)^2) dx_2 dx_1, \tag{15.31}$$

Функционал $a_0(U,U)$ не содержит поворота $\alpha_3 = (\partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2)/2$, поэтому в [100] предложено добавить в $a_N(U,U)$ слагаемое

$$\int_{\Omega_0} G\delta(\alpha_3 - (\partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2)/2)^2 dx_1 dx_2. \tag{15.32}$$

Далее

$$(g,U) = \int_{\Omega_0} (p_i u_i + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3) dx_1 dx_2, \tag{15.33}$$

$$b(U,U) = \int_{\Omega_0} \rho(\delta u_i u_i + I(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)) dx_1 dx_2, \tag{15.34}$$

$$c(U,U) = \int_{\Omega_0} (\delta c_i u_i^2 + Ic_3(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)) dx_1 dx_2. \tag{15.35}$$

Функционал для задачи устойчивости

$$\begin{aligned} a'_\sigma(U,V,V) = \int_\Omega [& N_{rq}\partial v_3 / \partial x_p \cdot \partial v_3 / \partial x_q + N_{11}(\partial v_2 / \partial x_1)^2 + N_{22}(\partial v_1 / \partial x_2)^2 + \\ & + N_{12}(\partial v_1 / \partial x_1 \cdot \partial v_1 / \partial x_2 + \partial v_2 / \partial x_1 \cdot \partial v_2 / \partial x_2) + \\ & + 2\partial(M_{1r}\alpha_1)/\partial x_r \cdot \partial v_2 / \partial x_1 - 2\partial(M_{2r}\alpha_2)/\partial x_r \cdot \partial v_1 / \partial x_2 - \\ & - 2(m_2\alpha_1\alpha_3 - m_1\alpha_2\alpha_3) + m_{33}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \partial(M_{rq}\alpha_r\alpha_3)/\partial x_q] dx_1 dx_2 / 2. \end{aligned} \tag{15.36}$$

где $\alpha_1 = \partial u_3 / \partial x_2$, $\alpha_2 = -\partial u_3 / \partial x_1$, $N_{iq} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{iq} dx_3$, $M_{rq} = -\int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3\sigma_{rq} dx_3$, $m_2 = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3 f_1 dx_3$,

$m_1 = -\int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3 f_2 dx_3$.

Первая сумма в (15.36) – изгиб от сжатия, последние – влияние изгиба.

Слагаемые $N_{11}(\partial v_2 / \partial x_1)^2 + N_{22}(\partial v_1 / \partial x_2)^2 + N_{12}(\partial v_1 / \partial x_1 \cdot \partial v_1 / \partial x_2 + \partial v_2 / \partial x_1 \cdot \partial v_2 / \partial x_2)$ существенны, хотя при использовании метода разложения по малому параметру (толщине) они приняты малыми[62,82]. Например, задачи устойчивости центрально сжатых стержней с сечениями – Пи, двутавр, Зет и т.д., можно моделировать и пластинами. Если в (15.36) не учитывать указанные слагаемые, критическая сила увеличивается на 30 – 50%.

Слагаемые, содержащие α_3, следует вводить в (15.36) только в том случае, когда функционал $a_0(U,U)$ работы внутренних сил содержит(15.32).

Стержни

Ось x_1 направлена вдоль прямолинейной оси стержня, отрезка $[0,l]=\Omega_0$, оси x_2, x_3 – главные центральные оси сечения A, $|A|$ – площадь сечения, $I_2=\int_A x_3^2 dA$, $I_3=\int_A x_2^2 dA$ – моменты инерции, x_2^0, x_3^0 – координаты центра кручения. Штрихами обозначается дифференцирование по x_1, I_ω – секториальный момент инерции.

$$a_0(U,U)=\int_0^l (E|A|u_1'^2+EI_2u_3''^2+EI_3u_2''^2+GI_1\alpha_1'^2/2+EI_\omega\alpha_1''^2+2(EI_3u_2''')^2/GF_3)+$$
$$+2(EI_2u_3''')^2/GF_2)dx\,. \tag{15.37}$$

Упругое основание моделируется прямоугольником, ортогональным оси x_3. Ширина прямоугольника b соответствует поверхности контакта. В $a_0(U,U)$ добавляется слагаемое

$$c_0(U,U)=b\int_0^l (C_1(u_3^2-2x_2^0u_3\alpha_1+(x_2^0)^2\alpha_1^2+b^2\alpha_1^2/12)+$$
$$+C_2(u_3'^2-2x_2^0u_3'\alpha_1'+(x_2^0)^2\alpha_1'^2+b^2\alpha_1'^2/12+\alpha_1^2))dx_1\,. \tag{15.38}$$

Для ортогонального оси x_2 основания заменяем в (15.38) u_3 на u_2 и x_2^0 на $-x_3^0$.

$$(g,U)=\int_0^l (p_iu_i+(m_1+f_2x_3^0-f_3x_2^0)\alpha_1-m_2u_3'+m_3u_2'+m_\omega\alpha'_1)dx_1\,, \tag{15.39}$$

$$b(U,U)=\int_0^l \rho(|A|(u_iu_i+2(x_3^0u_2-x_2^0u_3)\alpha_1+R\alpha_1^2)+I_2u_3'^2+I_3u_2'^2+I_\omega\alpha_1'^2)dx_1, \tag{15.40}$$

$$c(U,U)=\int_0^l (|A|(c_iu_i^2+2(c_2x_3^0u_2-c_3x_2^0u_3)\alpha_1+R_{23}\alpha_1^2)+c_3I_2u_3'^2$$
$$+c_2I_3u_2'^2+c_1I_\omega\alpha_1'^2)dx_1\,, \tag{15.41}$$

где $R=(x_2^0)^2+(x_3^0)^2+(I_2+I_3)/|A|$, $R_{23}=c_3(x_2^0)^2+c_2(x_3^0)^2+(c_3I_2+c_2I_3)/|A|$,

$m_1=\int_A (x_2f_3-x_3f_2)dA+p_2x_3^0-p_3x_2^0$, $m_2=\int_A x_3f_1dA$, $m_3=-\int_A x_2f_1dA$,

$p_i=\int_A f_i dA$, $m_\omega=\int_A f_1\phi dA$.

Функционал для задачи устойчивости

$$a'_\sigma(U,V,V)=\int_l [N_1(\alpha_2^2+\alpha_3^2)+M_1(\alpha_2{}'\alpha_3-\alpha_3{}'\alpha_2)-$$
$$-2(M_2\alpha_1)'\alpha_3+2(M_3\alpha_1)'\alpha_2+(M_2\alpha_1\alpha_3)'-(M_3\alpha_1\alpha_2)'-m_2\alpha_1\alpha_3+m_3\alpha_1\alpha_2+$$
$$+(N_1r^2+M_2I_{32}-M_3I_{23}+M_\omega I_{33})\alpha_1^2]dx_1/2-d^2(f,V), \tag{15.42}$$

где $r^2=(I_2+I_3)/A$, $I_{33}=\int_A \phi(x_2^2+x_3^2)dA/I_\omega$,

$I_{32}=\int_A x_3(x_2^2+x_3^2)dA/I_2$, $I_{23}=\int_A x_2(x_2^2+x_3^2)dA/I_3$,

где $N_i=\int_A \sigma_{1i}dA$, $M_1=\int_A (x_2\sigma_{13}-x_3\sigma_{12})dA$, $M_2=\int_A x_3\sigma_{11}dA$, $M_3=-\int_A x_2\sigma_{11}dA$.

Первое слагаемое под интегралом в (15.42) – изгиб от сжатия, второе – изгиб от кручения, третье – восьмое – кручение от изгиба, последнее – кручение от сжатия. Это слагаемое следует вводить только если функционал $a_0(U,U)$ содержит под интегралом $EI_\omega \alpha_1'^2$, иначе критическая сила может быть занижена. Три последних слагаемых в (15.42) – учет несимметричности нагрузки в сечении, например, сила приложена не в центре тяжести.

15.9Метод конечных элементов для линейной статической задачи

Все рассмотренные задачи (нелинейные, динамические, на собственные значения) сведены к решению последовательности линейных. Все эти задачи сформулированы как принцип возможных перемещений

$$a(U,V) = q(V), \qquad (15.43)$$

где $a(U,V)$ – симметричный положительно определенный билинейный функционал, $q(V)$ – линейный функционал, действительное перемещение U и любое возможное перемещение V определены на области Ω с границей Γ и принадлежат энергетическому пространству H.

Задачу (15.43) требуется свести к конечномерной, к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Одним из наиболее универсальных и распространенных способов для этого является метод конечных элементов (МКЭ) в перемещениях.

Область Ω разбивается на конечные элементы (КЭ) Ω_r которые, в зависимости от размерности, являются отрезками, выпуклыми многоугольниками или многогранниками, Γ_r – граница Ω_r. Различные КЭ не имеют общих внутренних точек. Узлами X_j конечно-элементной сетки являются вершины КЭ, возможны и узлы на сторонах (ребрах).

Наибольшее расстояние между узлами сетки, принадлежащими одному КЭ, обозначим h.

Разбиение на конечные элементы предполагается согласованным: если вершина или ребро элемента принадлежит и другому КЭ, то является вершиной или ребром этого другого конечного элемента.

Все функционалы, получаемые интегрированием по Ω, будем представлять как суммы соответствующих интегралов по Ω_r, функционал, полученный интегрированием по Ω_r, обозначаем индексом r.

Неизвестными МКЭ (степенями свободы) являются линейные функционалы $L_k(U)$, носители которых обозначим S_k.Функционалы $L_k(U)$ линейно-независимы: если равенства $c_k L_k(U) = 0$ выполнены для всех $U \in H$,то все $c_k = 0$. Обычно функционалы $L_k(U)$ – значения функций и их производных в узлах, тогда S_k совпадает с одним из узлов.

Неизвестные в узлах:

- перемещения для трехмерных областей;
- перемещения и повороты для стержней и пластин;
- для тонкостенных стержней добавляется седьмое перемещение.

Звездой элементов Ω^k, соответствующей функционалу $L_k(U)$, называется объединение всех элементов Ω_r, содержащих S_k.

Перемещения аппроксимируем линейными комбинациями базисных функций $\mu_k(x)$:

$$U_h(x) = d_k \mu_k(x). \tag{15.44}$$

Множество функций вида (15.44) обозначим H_μ.

Базисные функции $\mu_k(x)$ отличны от нуля только на Ω^k, они удовлетворяют равенствам

$$L_k(\mu_i) = \delta_{ki}. \tag{15.45}$$

Из (15.45) следует линейная независимость базисных функций.

Из(15.43) при $U = U_h$, $V = \mu_i$, получаем уравнения МКЭ

$$a(U_h, \mu_i) = q(\mu_i), \tag{15.46}$$

которые, используя (15.44), запишем в виде

$$d_k a(\mu_k, \mu_i) = q(\mu_i). \tag{15.47}$$

Элементы матрицы $a(\mu_k, \mu_i)$ и вектора $q(\mu_i)$ получаем суммированием по всем КЭ Ω_r элементов матриц $a_r(\mu_k, \mu_i)$ и векторов $q_r(\mu_i)$. Очевидно, что $a_r(\mu_k, \mu_i) \neq 0$ только при $\Omega_r \subset \Omega^{\mathrm{k}} \bigcap \Omega^i$, $q_r(\mu_k) \neq 0$ только при $\Omega_r \subset \Omega^{\mathrm{k}}$.

Матрица $a_r(\mu_k, \mu_i)$ и вектор $q_r(\mu_i)$ вычисляются в местной системе координат, связанной с элементом, корректируются на шарниры жордановыми исключениями, на жесткие вставки – при помощи матрицы, соответствующей перемещениям АЖТ , а затем преобразуются в общую; используется матрица, составленная из координат единичных векторов местной системы, матрица косинусов.

При вычислении интегралов применяется численное интегрирование – кубатурные формулы

$$\int_\Omega f d\Omega = \gamma_k f(x_k), x_k \in \Omega. \tag{15.48}$$

Изложенный достаточно простой метод построения системы уравнений МКЭ, основанный на том, что большинство вычислений выполняется независимо на каждом отдельном КЭ, является одним из основных алгоритмических преимуществ МКЭ.

Вторым существенным преимуществом МКЭ является простота удовлетворения граничным условиям. Из (15.44) и (15.45) следует равенство $L_j(U_h) = d_j$. Поэтому для выполнения не обязательно однородного граничного условия $L_j(U_h) = z_j$ достаточно в (15.44) и (15.47) задать $d_j = z_j$. Граничные условия на напряжения (усилия) выполнены всегда, так как МКЭ использует принцип возможных перемещений.

Элементы матрицы $a(\mu_k, \mu_i)$ отличны от нуля только если пересечение $\Omega^{\mathrm{k}} \bigcap \Omega^i$ содержит хотя бы один КЭ. Такие матрицы называют разреженными или слабо заполненными. При решении системы (15.47) методом Гаусса заполнение (количество ненулевых элементов) возрастает. Для уменьшения количества вычислений и времени решения СЛАУ следует перенумеровать неизвестные, чтобы заполнение стало как можно меньше. Такие методы, основанные на теории графов, изложены в [64].

По решению задачи (15.47) находим перемещения каждого КЭ в его системе координат, затем вычисляем напряжения для трехмерных элементов, усилия для стержней и пластин. Усилия в стержнях корректируются на распределенные нагрузки.